Lista 1-Eletromagnetismo 1

Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral

7 de agosto de 2014

1 Expressando em termos de componentes, usando o símbolo de Levi-Civita, mostre que

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{C}) \tag{1}$$

e que $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$. Obs: Utilize a regra para produto de duas ϵ,s.

2 Usando que sob uma rotação um campo vetorial se comporta como

$$V'_i(x') = R_{ij}V_j(x), \tag{2}$$

mostre que o sua divergência se comporta como um escalar:

$$\partial'_i V'_i(x') = \partial_j V_j(x). \tag{3}$$

Mostre que o laplaciano de uma campo escalar também é um escalar.

3 Mostre que

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{V}) = \phi\vec{\nabla}\times\vec{V} + \vec{\nabla}\phi\times\vec{V}. \tag{4}$$

e

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}). \tag{5}$$

4 A) Considere o campo vetorial definido, na região $x_3 > 0$, por $A_1 = A_2 = 0$ e $A_3 = cx_3^2$. Encontre a divergência de $\vec{A}(\vec{r})$ através de dois métodos: usando $\partial_i A_i$ **e** a partir de $\lim_{V\to 0}\frac{\oint_{\delta V}\vec{A}.\vec{da}}{V}$. No último caso, considere pequenos cubos com lados ortogonais aos eixos cartesianos.

B) Considere o campo vetorial definido por $A_1 = cx_2^2$, $A_2 = -cx_1^2$ e $A_3 = 0$. Encontre o rotacional de $\vec{A}(\vec{r})$ através de $\epsilon_{ijk}\partial_j A_k$ **e** através de $\lim_{S\to 0}\frac{\oint_{\delta S}\vec{A}.\vec{dl}}{S}$. No último caso, considere três pequenos quadrados com lados paralelos a cada um dos pares de eixos cartesianos.

5 a) Realizando a mudança de variáveis, $x \to x' = kx$, mostre que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \tag{6}$$

b)Mostre, aplicando a uma função teste genérica $f(x)$ e integrando, que

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x). \tag{7}$$

c)Considere uma função, $g(x)$, bem comportada na origem. Mostre que o produto $g(x)\delta(x-x_0)$ se comporta da mesma forma que $g(x_0)\delta(x-x_0)$.

6 Partindo das expressões

$$\vec{\nabla}_i\phi = \frac{1}{h_i}\partial_i\phi. \tag{8}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{h^3}\sum_j \partial_j\left(\frac{h^3 V_j}{h_j}\right), \tag{9}$$

e

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_i = \sum_{j,k} \frac{\epsilon_{ijk}}{h^3} h_i \partial_j \left(V_k h_k\right). \tag{10}$$

A) Mostre que em um sistema de coordenadas ortogonal qualquer a expressão do Laplaciano é dada por

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h^3} \sum_i \partial_i' \left(\frac{h^3 \partial_i' \phi}{h_i^2}\right). \tag{11}$$

B) Obtenha as expressões dos gradiente, divergência e rotacional em coordenadas esféricas e cilíntricas, usando adicionalmente que

$$x_1' = r, \quad x_2' = \theta, \quad x_3' = \phi \tag{12}$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta, \tag{13}$$

e

$$x_1' = \tilde{r}, \quad x_2' = \phi, \quad x_3' = z \tag{14}$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1. \tag{15}$$

respectivamente.

7 Um dipolo físico é composto por uma carga q localizada no ponto $\vec{r}_1$=(a,0,0), e outra, $-q$ localizada no ponto $\vec{r}_2$=(-a,0,0). Escreva em termos das funções delta de Dirac a densidade de cargas associada.

O potencial criado por uma densidade de cargas $\rho(\vec{r'})$, no ponto $\vec{r}$ é definido por

$$\phi(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d^3 r'. \tag{16}$$

Partindo da equação acima, obtenha o valor do potencial criado pelo dipolo físico no ponto $\vec{r} = (0, a, 0)$.

8 Usando os teoremas da divergência e de Stokes, mostre que

1)

$$\int_V \nabla \times \vec{A} dV = - \oint_{\delta V} \vec{A} \times d\vec{a}$$

2)

$$\int_S \vec{\nabla}\phi \times \vec{da} = - \oint_{\delta S} T \vec{dl}$$

9 A) Encontre a área vetorial, $\int_S \vec{da}$, de uma semiesfera.

B) Encontre a área vetorial da superfície lateral de um cone reto de base circular de raio R e de altura H. Em que direção aponta esse vetor? Como ele depende de H? Explique esse resultado. Sugestão: calcule separadamente cada componente cartesiana e explore a simetria do problema.